УДК 512.532.2

Л. А. Бокуть, Д. В. Ли

БАЗИС ГРЕБНЕРА–ШИРШОВА МОНОИДА ТЕМПЕРЛИ–ЛИБА–КАУФМАНА*

1. Введение

Алгебры Темперли–Либа возникли в 1971 году в работе Темперли и Либа [1]. В этой работе были найдены соотношения, которым удовлетворяют матрицы перехода некоторых физических моделей. Позже начались исследования уже абстрактных алгебр Темперли–Либа над полем с порождающими c, h_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned}
&h_i h_j = h_j h_i \quad |i-j| \geqslant 2,\\
&h_i h_{i\pm 1} h_i = h_i,\\
&h_i h_i = c h_i,\\
&c h_i = h_i c.
\end{aligned}$$

Таким образом, алгебра Темперли–Либа является полугрупповой алгеброй. Большой вклад в изучение алгебр Темперли–Либа был сделан немного позднее Джонсом, который независимо получил и исследовал эти же соотношения в [2]. В той же работе был определен и знаменитый полином Джонса для узлов и зацеплений. В дальнейшем полином Джонса применялся им для изучения алгебр фон Неймана в [3]. В [2] была указана (без доказательства) нормальная форма слов моноида Темперли–Либа.

Другой подход к изучению алгебры Темперли–Либа был найден Кауфманом в [4]. А именно, он определил так называемый связный моноид, состоящий из геометрических диаграмм. В [4] им сформулировано утверждение, что связный моноид изоморфен моноиду Темперли–Либа. В работе [5] связный моноид назван моноидом Кауфмана. Мы будем называть его *моноидом Темперли–Либа–Кауфмана.*

Основным объектом данной работы является моноид Темперли–Либа–Кауфмана K_n. Полугрупповая алгебра $\mathbf{k}(K_n)$ над полем $\mathbf{k}$ является алгеброй

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы «Ведущие научные школы».

Темперли–Либа. С точки зрения базисов Гребнера–Ширшова эти два объекта эквивалентны. Основной задачей работы является доказательство единственности нормальной формы Джонса моноида Темперли–Либа–Кауфмана с помощью базисов Гребнера–Ширшова.

Отметим, что доказательство существования нормальной формы Джонса уже было приведено в некоторых работах (см., например, [5]) и не представляет особой сложности. Главной трудностью является доказательство единственности нормальной формы. Мы уже отметили, что в [2] Джонс не привел обоснования этого факта. Насколько нам известно, первое строгое доказательство дали Бориславлевич, Дошен и Петрич в [5], оно геометрическое и довольно сложное. Приведенное нами доказательство длиннее, но по существу оно является более простым.

Данная работа представляет собой еще один пример использования метода базисов Гребнера–Ширшова для полугрупп, заданных определяющими соотношениями. Обычно в таких случаях применялись другие подходы: лемма Ньюмана, метод элементарных преобразований и т. д., хотя во многих случаях применение базисов Гребнера–Ширшова представляется более удобным. В качестве предпосылок к появлению этого метода можно назвать алгоритм Евклида, алгоритм Гаусса, теорему Гильберта о базисе, теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта, а также статьи Гордона (1900), Гребнера [6], Ньюмана [7] и др. Работы А. И. Ширшова [8], Хиронаки [9], Бухбергера [10] существенно обобщили этот подход.

Помимо работ, упомянутых выше, имеется много других работ по алгебрам Темперли–Либа. Например, в [11] показано, что базис этой алгебры состоит из слов, имеющих такой же вид, что и нормальная форма Бирман–Ко–Ли в группе кос (см. [12]). На сегодняшний день алгебры Темперли–Либа продолжают привлекать внимание исследователей.

2. Базис Гребнера–Ширшова

Пусть X – вполне упорядоченное множество, $\mathbf{k}\langle X\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем $\mathbf{k}$, X^* – множество слов от X (включая пустое слово 1). Считаем, что X^* также вполне упорядочено с продолжением порядка на X. При этом предполагаем, что порядок согласован с умножением слов, т. е. из $u > v$ следует, что $aub > avb$ для любых слов u, v, a, b. Через $\overline{f}$, где $f \in \mathbf{k}\langle X\rangle$, обозначим старшее слово многочлена f. Многочлен f называется *унитарным*, если коэффициент при $\overline{f}$ равен 1. Длину слова u мы обозначаем через $|u|$.

Для двух унитарных многочленов f, g и слова w определим их композицию (см. [8, 13]):

$$(f,g)_w = \begin{cases} f - agb, & \text{если } w = \overline{f} = a\overline{g}b, \\ fb - ag, & \text{если } w = \overline{f}b = a\overline{g},\ |\overline{f}| + |\overline{g}| > |w|. \end{cases}$$

Слово w называется *неопределенностью* (*ambiguity*) *для* f, g. Композиция первого вида называется *композицией включения*, композиция второго вида – *композицией пересечения*.

Пусть S – некоторое множество унитарных многочленов и $f, g \in S$. Композиция $(f,g)_w$ называется *тривиальной относительно* S (точнее, относительно S и w, $(f,g)_w \equiv 0 \pmod{S, w}$) (см. [13, 14]), если

$$(f,g)_w = \Sigma \alpha_i a_i s_i b_i, \text{ где } \alpha_i \in \mathbf{k},\ a_i, b_i \in X^*,\ a_i \overline{s_i} b_i < w.$$

Преобразование $f \mapsto f - agb$, где $\overline{f} = a\overline{g}b$, называется *исключением старшего слова многочлена* g в f. Легко заметить, что если $(f,g)_w$ приводится к нулю с помощью исключения старших слов многочленов S, то композиция $(f,g)_w$ тривиальна.

Множество S называется *базисом Гребнера–Ширшова*, если любая композиция $(f,g)_w$ многочленов $f, g \in S$ тривиальна. Заметим, что в [8, 13] такое множество называлось множеством, замкнутым относительно композиций.

Лемма. (Лемма о композиции – Diamond Lemma, см. [8, 13–15]) *Множество S является базисом Гребнера–Ширшова в $\mathbf{k}\langle X\rangle$ тогда и только тогда, когда множество S-редуцированных слов*

$$Red(S) = \{u \in X^* \mid u \neq a\overline{s}b, s \in S, a, b \in X^*\}$$

есть линейный базис фактор-алгебры

$$\mathbf{k}\langle X\rangle / S = \langle X \mid S\rangle.$$

Если $S \subset \mathbf{k}\langle X\rangle$ не является базисом Гребнера–Ширшова, то к S можно добавить все нетривиальные композиции полиномов из S. Повторяя эту процедуру (возможно бесконечное число раз), мы получим базис Гребнера–Ширшова S^{comp}. Описанный процесс называется *алгоритмом Бухбергера–Ширшова* (см. [8, 10]). Если S является множеством полугрупповых соотношений (т. е. состоит из полиномов вида $u - v$, где $u, v \in X^*$), то любая нетривиальная композиция полиномов из S будет иметь такой же вид. Следовательно S^{comp} также состоит из полугрупповых соотношений.

Пусть задана полугруппа $A = sgr\langle X \mid S\rangle$. Тогда $S \subset \mathbf{k}\langle X\rangle$, и мы можем найти базис Гребнера–Ширшова S^{comp}. Множество S^{comp} не зависит от поля и состоит из полугрупповых соотношений. Будем называть S^{comp} *базисом Гребнера–Ширшова полугруппы* A.

3. Моноид Темпрели–Либа–Кауфмана

Как уже говорилось во введении, мы будем рассматривать полугруппу с единицей K_n, $n \geqslant 2$, определенную порождающими c, h^i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и определяющими соотношениями

$$h^i h^j = h^j h^i, \text{ где } |i-j| \geqslant 2, \tag{1}$$

$$h^i h^{i\pm 1} h^i = h^i, \tag{2}$$

$$h^i h^i = ch^i, \tag{3}$$

$$h^i c = ch^i. \tag{4}$$

Положим $h^{[i,j]} = h^i h^{i-1} \cdots h^{j+1} h^j$, где $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда из определяющих соотношений (1)–(4) и вида элементов $h^{[i,j]}$ легко видеть, что выполняются следующие равенства:

$$h^{[i,j]} c = ch^{[i,j]}, \tag{5}$$

$$h^{[i,j]} h^{[k,l]} = h^{[k,l]} h^{[i,j]}, j \geqslant k+2, \tag{6}$$

$$h^{[i,j]} h^{[k,l]} = h^{[i,l]}, |k-j| = 1, i \geqslant l, \tag{7}$$

$$h^{[i,j]} h^{[j,l]} = ch^{[i,l]}. \tag{8}$$

Очевидно, что определяющие соотношения в терминах $h^i = h^{[i,i]}$ являются частным случаем соотношений (5)–(8), т. е. соотношения (1)–(4) и (5)–(8) эквивалентны.

Лемма 1. *Для $k \geqslant j+2$ верны следующие равенства:*

$$h^{[i,j]} h^{[k,l]} = h^{[k-2,l]} h^{[i,j+2]}, i \geqslant k, j \geqslant l, \tag{9}$$

$$h^{[i,j]} h^{[k,l]} = h^{[i,l]} h^{[k,j+2]}, i < k, j \geqslant l, \tag{10}$$

$$h^{[i,j]} h^{[k,l]} = h^{[k-2,j]} h^{[i,l]}, i \geqslant k, j < l. \tag{11}$$

Доказательство. Соотношения (9)–(11) были приведены в [5], однако без доказательства. Приведем доказательства равенств (9) и (10) (доказательство равенства (11) аналогично таковому для (10)):

$$h^{[i,j]} h^{[k,l]} = h^{[i,j+1]} h^j h^k h^{[k-1,l]} = h^{[i,j+1]} h^k h^j h^{[k-1,l]} =$$
$$= h^{[i,k]} h^{[k-2,j+1]} h^{[k-1,j+2]} h^{[j,l]} = h^{[k-2,j+1]} h^{[i,k]} h^{[j,l]} h^{[k-1,j+2]} =$$
$$= h^{[k-2,j+1]} h^{[j,l]} h^{[i,k]} h^{[k-1,j+2]} = h^{[k-2,l]} h^{[i,j+2]},$$

$$h^{[i,j]}h^{[k,l]} = h^i h^{[i-1,j]} h^{[k,i+1]} h^{[i,l]} = h^i h^{[k,i+1]} h^{[i-1,j]} h^{[i,l]} =$$
$$= h^i h^{[k,i+1]} h^{i-1} h^{[i-2,j]} h^{[i,l]} = h^i h^{[k,i+1]} h^{i-1} h^i h^{i-1} h^{[i-2,j]} h^{[i,l]} =$$
$$= h^i h^{i-1} h^{[k,i+1]} h^i h^{i-1} h^{[i-2,j]} h^{[i,l]} = h^i h^{i-1} h^{[k,j]} h^{[i,l]} =$$
$$= h^i h^{i-1} h^{[i-2,l]} h^{[k,j+2]} = h^{[i,l]} h^{[k,j+2]}.$$

4. Базис Гребнера–Ширшова моноида K_n

На множестве слов над алфавитом $\{c, h^{[i,j]}\}$ введем следующий порядок: слово большей длины больше слова меньшей длины, а слова равных длин сравниваем лексикографически, считая $h^{[i,j]} > c$, $h^{[i,j]} > h^{[k,l]}$, если $i > k$ или $i = k$, $j > l$.

Теорема. *Для моноида K_n соотношения* (5)–(11) *составляют базис Гребнера–Ширшова.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо проверить, что соотношения (5)–(11) замкнуты относительно композиций. В данном случае все композиции являются композициями пересечения. Композиции всех соотношений с соотношением (5), очевидно, тривиальны. Поэтому ниже рассматриваются только композиции соотношений (6)–(11).

Введем следующие обозначения:

- $(i) \wedge (j)$ – композиция i-го и j-го соотношений (отметим, что $(i) \wedge (j)$ и $(j) \wedge (i)$ – это разные композиции);
- $\equiv_i$ обозначает равенство по модулю i-го соотношения (правая часть получается из левой исключением старшего слова i-го соотношения).

Всего получается 36 композиций. Ниже все они приведены и показана их тривиальность.

1. $(6) \wedge (6),\ j \geqslant k+2,\ l \geqslant m+2.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k,l]}h^{[i,j]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m,n]}h^{[k,l]}) =$$
$$= -h^{[k,l]}h^{[i,j]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m,n]}h^{[k,l]} \equiv_1 -h^{[k,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j]} + h^{[m,n]}h^{[k,l]}h^{[i,j]} \equiv_1 0.$$

2. $(7) \wedge (7),\ i \geqslant l,\ k \geqslant n,\ |j-k| = |l-m| = 1.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_2 0.$$

3. (8) $\wedge$ (8).

$$(h^{[i,j]}h^{[j,l]} - ch^{[m,n]})h^{[l,m]} - h^{[i,j]}(h^{[j,l]}h^{[l,m]} - ch^{[j,m]}) =$$
$$= -ch^{[i,l]}h^{[l,m]} + ch^{[i,j]}h^{[j,m]} \equiv_3 0.$$

4. (9) $\wedge$ (9), $i \geqslant k \geqslant m,\ j \geqslant l \geqslant n,\ k \geqslant j+2,\ m \geqslant l+2.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}) =$$
$$= -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}.$$

а) Если $m \geqslant j+4$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_4 -h^{[k-2,l]}h^{[m-2,n]}h^{[i,j+4]} + h^{[m-4,n]}h^{[i,j+2]}h^{[k,l+2]} \equiv_4$$
$$\equiv_4 -h^{[m-4,n]}h^{[k-2,l+2]}h^{[i,j+4]} + h^{[m-4,n]}h^{[k-2,l+2]}h^{[i,j+4]} \equiv 0.$$

б) Если $|m-j-2| = 1$, то продолжаем так:

$$\equiv_2 -h^{[k-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[i,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_5 -h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

в) Если $m = j+2$, то продолжаем так:

$$\equiv_3 -ch^{[k-2,l]}h^{[i,n]} + ch^{[i,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_1 0.$$

г) Наконец, если $m \leqslant j$, то продолжаем так:

$$\equiv_1 -h^{[k-2,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l+2]} \equiv_4$$
$$\equiv_4 -h^{[m-2,n]}h^{[k-2,l+2]}h^{[i,j+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[k-2,l+2]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

5. (10) $\wedge$ (10), $i < k < m,\ j \geqslant l \geqslant n,\ k \geqslant j+2,\ m \geqslant l+2.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]}h^{[k,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}.$$

а) Если $m \geqslant j+4$, то $j+2 > n$ и продолжаем выкладку так:

$$\equiv_5 -h^{[i,l]}h^{[k,n]}h^{[m,j+4]} + h^{[i,n]}h^{[k,j+2]}h^{[m,l+2]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[i,n]}h^{[k,l+2]}h^{[m,j+4]} + h^{[i,n]}h^{[k,l+2]}h^{[m,j+4]} \equiv 0.$$

б) Если $m = j+3$, то $k = j+2$ и продолжаем так:

$$= -h^{[i,l]}h^{j+2}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[j+2,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[i,l]}h^{j+2}h^{[m,n]} + h^{[i,n]}h^{j+2}h^{[m,l+2]} = h^{[i,l]}h^{[j+2,n]} + h^{[i,n]}h^{[j+2,l+2]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[i,n]}h^{[j+2,l+2]} + h^{[i,n]}h^{[j+2,l+2]} \equiv 0.$$

6. $(11) \wedge (11)$, $i \geqslant k \geqslant m,\ j < l < n,\ k \geqslant j+2,\ m \geqslant l+2.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,j]}h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}) = \\ = -h^{[k-2,j]}h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $m \geqslant j+4$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_6 -h^{[k-2,j]}h^{[m-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[m-4,j]}h^{[i,l]}h^{[k,n]} \equiv_6 \\ \equiv_6 h^{[m-4,j]}h^{[k-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[m-4,j]}h^{[k-2,l]}h^{[i,n]} \equiv 0.$$

б) Если $m = j+3$, то $l = j+1$ и продолжаем так:

$$= -h^{[k-2,j]}h^{j+1}h^{[i,n]} + h^{[i,j]}h^{j+1}h^{[k,n]} = -h^{[k-2,j+1]}h^{[i,n]} + h^{[i,j+2]}h^{[k,n]} \equiv_6 \\ \equiv_6 -h^{[k-2,j+1]}h^{[i,n]} + h^{[k-2,j+1]}h^{[i,n]} \equiv 0.$$

7. $(6) \wedge (7)$, $j \geqslant k+2,\ k \geqslant n,\ |m-l| = 1.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k,l]}h^{[i,j]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}) = \\ = -h^{[k,l]}h^{[i,j]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $j \geqslant m+2$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_1 -h^{[k,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_2 -h^{[k,n]}h^{[i,j]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv 0.$$

б) Если $j = m+1$, то $k = l = m-1$ и продолжаем так:

$$= -h^{m-1}h^{[i,m+1]}h^{[m,n]} + h^{[i,m+1]}h^{[m-1,n]} = \\ = h^{[1,m+1]}h^{m-2}h^{[m-1,n]} + h^{[i,m+1]}h^{[m-1,n]} = \\ = -h^{[i,m+1]}h^{[m-1,n]} + h^{[i,m+1]}h^{[m-1,n]} \equiv 0.$$

8. $(7) \wedge (6)$, $i \geqslant l \geqslant m+2,\ |j-k| = 1.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m,n]}h^{[k,l]}) = \\ = -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m,n]}h^{[k,l]}.$$

а) Если $j \geqslant m+2$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{1,2} -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[m,n]}h^{[i,l]} \equiv 0.$$

б) Если $j = m+1$, то $k = l = m+2$ и продолжаем так:

$$= -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,m+1]}h^{[m,n]}h^{[m+2]} = -h^{[i,m+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,m+2]}h^{[m,n]} \equiv 0.$$

9. (6) $\wedge$ (8), $j \geqslant k+2$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k,l]}h^{[i,j]})h^{[l,m]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[l,m]} - ch^{[k,m]}) =$$
$$= -h^{[k,l]}h^{[i,j]}h^{[l,m]} + ch^{[i,j]}h^{[k,m]} \equiv_1 -h^{[k,l]}h^{[l,m]}h^{[i,j]} + ch^{[i,j]}h^{[k,m]} \equiv_3 0.$$

10. (8) $\wedge$ (6), $l \geqslant m+2$.

$$(h^{[i,j]}h^{[j,l]} - ch^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[j,l]}h^{[m,n]} - h^{[m,n]}h^{[j,l]}) =$$
$$= -ch^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m,n]}h^{[j,l]} \equiv_{1,3} -ch^{[m,n]}h^{[i,l]} + ch^{[m,n]}h^{[i,l]} \equiv 0.$$

11. (6) $\wedge$ (9), $j \geqslant k+2,\ k \geqslant m \geqslant l+2,\ l \geqslant n$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k,l]}h^{[i,j]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}) =$$
$$= -h^{[k,l]}h^{[i,j]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_1$$
$$\equiv_1 -h^{[k,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l+2]} \equiv_4$$
$$\equiv_4 -h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}h^{[i,j]} + h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}h^{[i,j]} \equiv 0.$$

12. (9) $\wedge$ (6), $i \geqslant k \geqslant j+2, j \geqslant l \geqslant m+2$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m,n]}h^{[k,l]}) =$$
$$= -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m,n]}h^{[k,l]} \equiv_1$$
$$\equiv_1 -h^{[k-2,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[m,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l]} \equiv_{1,4}$$
$$\equiv_{1,4} -h^{[m,n]}h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]} + h^{[m,n]}h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

13. (6) $\wedge$ (10), $j \geqslant k+2,\ m \geqslant l+2,\ l \geqslant n,\ k < m$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k,l]}h^{[i,j]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}) =$$
$$= -h^{[k,l]}h^{[i,j]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_1 -h^{[k,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j]} + h^{[k,n]}h^{[i,j]}h^{[m,l+2]}.$$

а) Если $i < m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_5 -h^{[k,l]}h^{[i,n]}h^{[m,j+2]} + h^{[k,n]}h^{[i,j]}h^{[m,l+2]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[k,n]}h^{[i,l+2]}h^{[m,j+2]} + h^{[k,n]}h^{[i,l+2]}h^{[m,j+2]} \equiv 0.$$

б) Если $i \geqslant m$, продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[k,l]}h^{[m-2,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[k,n]}h^{[i,j]}h^{[m,l+2]} \equiv_4$$
$$\equiv_4 -h^{[k,l]}h^{[m-2,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[k,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[i,j+2]}.$$

Здесь нам придется разветвить вычисление. Если $m \geqslant j+2$, продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[k,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[i,j+2]} + h^{[k,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

Если $m = j+1$, продолжаем так:

$$\equiv_2 -h^{[k,l]}h^{[i,n]} + h^{[k,n]}h^{[i,l+2]} \equiv_4 -h^{[k,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[k,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

Наконец, если $m = j$, то продолжаем так:

$$\equiv_3 -ch^{[k,l]}h^{[i,n]} + ch^{[k,n]}h^{[i,l+2]} \equiv_4 0.$$

14. $(10) \wedge (6)$, $i < k$, $j \geqslant l \geqslant m+2$, $k \geqslant j+2$.

$$\begin{aligned}(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]}h^{[k,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m,n]}h^{[k,l]}) &= \\ = -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m,n]}h^{[k,l]} &\equiv_1 \\ \equiv_1 -h^{[i,l]}h^{[m,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[m,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l]} &\equiv_{1,5} \\ \equiv_{1,5} -h^{[m,n]}h^{[i,l]}h^{[k,j+2]} + h^{[m,n]}h^{[i,l]}h^{[k,j+2]} &\equiv 0.\end{aligned}$$

15. $(6) \wedge (11)$, $j \geqslant k+2$, $k \geqslant m \geqslant l+2$, $l \geqslant n$.

$$\begin{aligned}(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k,l]}h^{[i,j]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}) &= \\ = -h^{[k,l]}h^{[i,j]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,l]}h^{[k,n]} &\equiv_1 \\ \equiv_1 -h^{[k,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j]} + h^{[m-2,l]}h^{[i,j]}h^{[k,n]} &\equiv_6 \\ \equiv_6 -h^{[m-2,n]}h^{[k,n]}h^{[i,j]} + h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}h^{[i,j]} &\equiv 0.\end{aligned}$$

16. $(11) \wedge (6)$, $i \geqslant k \geqslant j+2$, $j < l$, $l \geqslant m+2$.

$$\begin{aligned}(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,j]}h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m,n]}h^{[k,l]}) &= \\ = -h^{[k-2,j]}h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m,n]}h^{[k,l]}&.\end{aligned}$$

а) Если $j \geqslant m+2$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_1 -h^{[k-2,j]}h^{[m,n]}h^{[i,l]} + h^{[m,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l]} \equiv_{1,6} 0.$$

б) Если $j \leqslant m-2$ и $j \geqslant n$, продолжаем так:

$$\begin{aligned}\equiv_{1,4} -h^{[k-2,j]}h^{[m,n]}h^{[k,l]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,j+2]}h^{[k,l]} &\equiv_{4,6} \\ \equiv_{4,6} -h^{[m-2,j]}h^{[k-2,n]}h^{[i,l]} + h^{[m-2,j]}h^{[k-2,n]}h^{[i,l]} &\equiv 0.\end{aligned}$$

в) Если $j \leqslant m-2$ и $j < n$, продолжаем так:

$$\equiv_{1,5} -h^{[k-2,j]}h^{[m,n]}h^{[i,l]} + h^{[m-2,j]}h^{[i,n]}h^{[k,l]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[m-2,j]}h^{[k-2,n]}h^{[i,l]} + h^{[m-2,j]}h^{[k-2,n]}h^{[i,l]} \equiv 0.$$

г) Если $|m-j| = 1$, продолжаем так:

$$\equiv_{1,2} -h^{[k-2,j]}h^{[m,n]}h^{[i,l]} + h^{[i,n]}h^{[k,l]} \equiv_{2,6} -h^{[k-2,n]}h^{[i,l]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l]} \equiv 0.$$

д) Если $m = j$, продолжаем так:

$$\equiv_{1,3} -h^{[k-2,j]}h^{[m,n]}h^{[i,l]} + ch^{[i,n]}h^{[k,l]} \equiv_{3,6} -ch^{[k-2,n]}h^{[i,l]} + ch^{[k-2,n]}h^{[i,l]} \equiv 0.$$

17. $(7) \wedge (8)$, $|j-k| = 1$, $i \geqslant l$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]})h^{[l,m]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[l,m]} - ch^{[k,m]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[l,m]} + ch^{[i,j]}h^{[k,m]} \equiv_{2,3} 0.$$

18. $(8) \wedge (7)$, $|l-m| = 1$, $j \geqslant n$.

$$(h^{[i,j]}h^{[j,l]} - ch^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[j,l]}h^{[m,n]} - h^{[j,n]}) =$$
$$= -ch^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[j,n]} \equiv_{2,3} 0.$$

19. $(7) \wedge (9)$, $|j-k| = 1$, $i \geqslant l \geqslant n$, $k \geqslant m \geqslant l+2$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h[i,j]h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}.$$

а) Если $j \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{1,4} h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l+2]} \equiv_2 0.$$

б) Если $j < m$, то $j = k-1 = m-1$ и продолжаем так:

$$= -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,n]}h^{[m,l+2]}.$$

Здесь нам снова придется разветвить вычисление. Если $i = m-1$, продолжаем так:

$$= -h^{[m-1,l]}h^{[m,n]} + h^{[m-1,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_4 -h^{[m-1,n]}h^{[m,l+2]} + h^{[m-1,n]}h^{[m,l+2]} \equiv 0.$$

Если $i \geqslant m$, продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

20. $(9) \wedge (7)$, $i \geqslant k \geqslant n,\ j \geqslant l, k \geqslant j+2,\ |l-m| = 1.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}) = \\ = -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $j \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{1,4} -h^{[k-2,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} \equiv_2 \\ \equiv_2 -h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

б) Если $m = j+1$, то $l = j$ и продолжаем так:

$$= -h^{[k-2,j]}h^{[i,j+2]}h^{[j+1,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}.$$

И в этом случае вычисление разветвляется. Если $j < n$, продолжаем так:

$$= -h^{[k-2,j]}h^{[i,n]} + h^{[k-2,j]}h^{[i,n]} \equiv 0.$$

Если же $j \geqslant n$, продолжаем так:

$$= -h^{[k-2,j]}h^{[i,n]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} \equiv_5 = -h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

21. $(7) \wedge (10)$, $|j-k| = 1,\ i \geqslant l,\ m \geqslant l+2,\ k < m,\ l \geqslant n.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}) = \\ = -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_2 -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,n]}h^{[m,l+2]}.$$

а) Если $i \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_4 -h^{[m-2,n]} + h^{[i,l+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

б) Если $i < m$, продолжаем так:

$$\equiv_5 -h^{[i,n]}h^{[m,l+2]} + h^{[i,n]}h^{[m,l+2]} \equiv 0.$$

22. $(10) \wedge (7)$, $i < k,\ j \geqslant l,\ k \geqslant j+2,\ |l-m| = 1,\ k \geqslant n.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]}h^{[k,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}) = \\ = -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $j \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_1 -h^{[i,l]}h^{[m,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_2 -h^{[i,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_5 \\ \equiv_5 -h^{[i,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[i,n]}h^{[k,j+2]} \equiv 0.$$

б) Если $j < m$, то $l = j = m - 1$ и продолжаем так:

$$= -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[j+1,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} = -h^{[i,l]}h^{[k,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv 0.$$

23. $(7) \wedge (11)$, $|j - k| = 1$, $i \geqslant l$, $k \geqslant m \geqslant l + 2$, $l < n$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $j \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{1,6} -h^{[m-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[m-2,l]}h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_2 0.$$

б) Если $j < m$, то $m = k$, $j = k - 1$ и продолжаем так:

$$= -h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,m-1]}h^{[m-2,l]}h^{[m,n]} \equiv 0.$$

24. $(11) \wedge (7)$, $i \geqslant k \geqslant j + 2$, $j < l$, $k \geqslant n$, $|l - m| = 1$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,j]}h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}) =$$
$$= -h^{[k-2,j]}h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_2 -h^{[k-2,j]}h^{[i,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $j \geqslant n$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{4,5} -h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

б) Если $j < n$, продолжаем так:

$$\equiv_5 -h^{[k-2,j]}h^{[i,n]} + h^{[k-2,j]}h^{[i,n]} \equiv 0.$$

25. $(8) \wedge (9)$, $j \geqslant m \geqslant l + 2$, $l \geqslant n$.

$$(h^{[i,j]}h^{[j,l]} - ch^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[j,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,n]}h^{[j,l+2]}) =$$
$$= -ch^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,n]}h^{[j,l+2]} \equiv_{3,4}$$
$$\equiv_{3,4} -ch^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + ch^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

26. $(9) \wedge (8)$, $i \geqslant k \geqslant j + 2$, $j \geqslant l$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]})h^{[l,m]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[l,m]} - ch^{[k,m]}) =$$
$$= -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[l,m]} + ch^{[i,j]}h^{[k,m]} \equiv_{1,4}$$
$$\equiv_{1,4} -h^{[k-2,l]}h^{[l,m]}h^{[i,j+2]} + ch^{[k-2,m]}h^{[i,j+2]} \equiv_3 0.$$

27. $(8) \wedge (10)$, $m \geqslant l+2,\ j<m,\ l \geqslant n$.

$$(h^{[i,j]}h^{[j,l]} - ch^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[j,l]}h^{[m,n]} - h^{[j,n]}h^{[m,l+2]}) =$$
$$= -ch^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[j,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_3 -ch^{[i,l]}h^{[m,n]} + ch^{[i,n]}h^{[m,l+2]}.$$

а) Если $i \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{4,5} -ch^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + ch^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

б) Если $i < m$, продолжаем так:

$$\equiv_4 -ch^{[i,n]}h^{[m,l+2]} + ch^{[i,n]}h^{[m,l+2]} \equiv 0.$$

28. $(10) \wedge (8)$, $i<k,\ j \geqslant l,\ k \geqslant j+2$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]}h^{[k,j+2]})h^{[l,m]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[l,m]} - ch^{[k,m]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[l,m]} + ch^{[i,j]}h^{[k,m]} \equiv_{1,5} -h^{[i,l]}h^{[l,m]}h^{[k,j+2]} + ch^{[i,m]}h^{[k,j+2]} \equiv_3$$
$$\equiv_3 -ch^{[i,m]}h^{[k,j+2]} + ch^{[i,m]}h^{[k,j+2]} \equiv 0.$$

29. $(8) \wedge (11)$, $j \geqslant m \geqslant l+2,\ l<k$.

$$(h^{[i,j]}h^{[j,l]} - ch^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[j,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,l]}h^{[j,n]}) =$$
$$= -ch^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,l]}h^{[j,n]} \equiv_{1,6} -ch^{[m-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[m-2,l]}h^{[i,j]}h^{[j,n]} \equiv_3 0.$$

30. $(11) \wedge (8)$, $i \geqslant k \geqslant j+2,\ j<l$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,j]}h^{[i,l]})h^{[l,m]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[l,m]} - h^{[k,m]}) =$$
$$= -h^{[k-2,j]}h^{[i,l]}h^{[l,m]} + ch^{[i,j]}h^{[k,m]}.$$

а) Если $j \geqslant m$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_{3,4} -ch^{[k-2,j]}h^{[i,m]} + ch^{[k-2,m]}h^{[i,j+2]} \equiv_5 0.$$

б) Если $j < m$, продолжаем так:

$$\equiv_{3,6} -ch^{[k-2,j]}h^{[i,m]} + ch^{[k-2,j]}h^{[i,m]} \equiv 0.$$

31. $(9) \wedge (10), i \geqslant k, j \geqslant l, k \geqslant j+2k < m, l \geqslant n, m \geqslant l+2$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}) =$$
$$= -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_4$$
$$\equiv_4 -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]}h^{[m,l+2]}.$$

а) Если $m = j + 3$, то $i \geqslant l + 2$ и продолжаем выкладку так:

$$\equiv_2 -h^{[k-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv_4 -h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

б) Если $m \geqslant j + 4$ и $\geqslant m$, продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[k-2,l]}h^{[m-2,n]}h^{[i,j+4]} + h^{[k-2,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[i,l+4]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[k-2,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[i,j+4]} + h^{[k-2,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[i,j+4]} \equiv 0.$$

в) Если $m \geqslant j + 4$ и $i < m$, продолжаем так:

$$\equiv_5 -h^{[k-2,l]}h^{[i,n]}h^{[m,j+4]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]}h^{[m,j+4]} \equiv_4$$
$$\equiv_4 -h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]}h^{[m,j+4]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]}h^{[m,j+4]} \equiv 0.$$

32. $(10) \wedge (9)$, $i < k$, $j \geqslant l \geqslant n$, $k \geqslant j + 2$, $m \geqslant l + 2$, $k \geqslant m$.

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]}h^{[k,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}.$$

а) Если $m = j + 2$, то $k > n$ и продолжаем выкладку так:

$$\equiv_3 -ch^{[i,l]}h^{[k,n]} + ch^{[i,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_5 0.$$

б) Если $|m - j - 2| = 1$, продолжаем так:

$$\equiv_2 -h^{[i,l]}h^{[k,n]} + h^{[i,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_5 0.$$

в) Если $m \leqslant j$, продолжаем так:

$$\equiv_1 -h^{[i,l]}h^{[m,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,j]}h^{[k,l+2]} \equiv_{4,5}$$
$$\equiv_{4,5} -h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]}h^{[k,j+2]} + h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]}h^{[k,j+2]} \equiv 0.$$

г) Если $m \geqslant j + 4$ и $i \geqslant m - 2$, продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[i,l]}h^{[m-2,n]}h^{[k,j+4]} + h^{[m-4,n]}h^{[i,j+2]}h^{[k,l+2]} \equiv_{4,5}$$
$$\equiv_{4,5} -h^{[m-4,n]}h^{[i,l+2]}h^{[k,j+4]} + h^{[m-4,n]}h^{[i,l+2]}h^{[k,j+4]} \equiv 0.$$

д) Если $m \geqslant j + 4$ и $i < m - 2$, продолжаем так:

$$\equiv_{4,5} -h^{[i,l]}h^{[m-2,n]}h^{[k,j+4]} + h^{[i,n]}h^{[m-2,j+2]}h^{[k,l+2]} \equiv_5$$
$$\equiv_5 -h^{[i,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[k,j+4]} + h^{[i,n]}h^{[m-2,l+2]}h^{[k,j+4]} \equiv 0.$$

33. $(9) \wedge (11)$, $i \geqslant k \geqslant j+2,\ j \geqslant l,\ l < n,\ k \geqslant m \geqslant l+2.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}) = \\ = -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $m \geqslant j+4$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_4 -h^{[k-2,l]}h^{[i,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[m-4,l]}h^{[i,j+2]}h^{[k,n]}.$$

Здесь приходится разветвить вычисление. Если $j+2 \geqslant n$, то продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[k-2,l]}h^{[m-2,n]}h^{[i,j+4]} + h^{[m-4,l]}h^{[k-2,n]}h^{[i,j+4]} \equiv_6 \\ \equiv_6 -h^{[m-4,l]}h^{[k-2,n]}h^{[i,j+4]} + h^{[m-4,l]}h^{[k-2,n]}h^{[i,j+4]} \equiv 0.$$

Если же $j+2 < n$, то продолжаем так:

$$\equiv_6 -h^{[k-2,l]}h^{[m-2,j+2]}h^{[i,n]} + h^{[m-4,l]}h^{[k-2,j+2]}h^{[i,n]} \equiv_6 \\ \equiv_6 -h^{[m-4,l]}h^{[k-2,j+2]}h^{[i,n]} + h^{[m-4,l]}h^{[k-2,j+2]}h^{[i,n]} \equiv 0.$$

б) Если $|m-j-2| = 1$, продолжаем так:

$$\equiv_2 -h^{[k-2,l]}h^{[i,n]} + h^{[i,l]}h^{[k,n]} \equiv_6 0.$$

в) Если $m = j+2$, продолжаем так:

$$\equiv_3 -ch^{[k-2,l]}h^{[i,n]} + ch^{[i,l]}h^{[k,n]} \equiv_6 0.$$

г) Если $m \leqslant j$, продолжаем так:

$$\equiv_1 -h^{[k-2,l]}h^{[m,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[m-2,l]}h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_{4,6} \\ \equiv_{4,6} -h^{[m-2,l]}h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} + h^{[m-2,l]}h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]} \equiv 0.$$

34. $(11) \wedge (9)$, $i \geqslant k \geqslant j+2,\ j < l,\ k \geqslant m \geqslant l+2,\ l \geqslant n.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,j]}h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}) = \\ = -h^{[k-2,j]}h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,n]}h^{[k,l+2]}.$$

а) Если $m = j+3$, то $k \geqslant j+3$ и выкладка продолжится так:

$$\equiv_{2,4} -h^{[k-2,j]}h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[i,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_{2,6} \\ \equiv_{2,6} -h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

б) Если $m \geqslant j+4$ и $j \geqslant n$, то продолжаем так:

$$\equiv_4 -h^{[k-2,j]}h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[m-4,n]}h^{[i,j+2]}h^{[k,l+2]} \equiv_{4,5}$$
$$\equiv_{4,5} -h^{[m-4,n]}h^{[k-2,j+2]}h^{[i,l+2]} + h^{[m-4,n]}h^{[k-2,j+2]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

в) Если $m \geqslant j+4$ и $j < n$, то продолжаем так:

$$\equiv_{4,6} -h^{[k-2,j]}h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[m-4,j]}h^{[i,n]}h^{[k,l+2]} \equiv_6$$
$$\equiv_6 -h^{[m-4,j]}h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[m-4,j]}h^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

35. $(10) \wedge (11)$, $i < k,\ j \geqslant l,\ k \geqslant j+2,\ k \geqslant m \geqslant l+2,\ l < n.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[i,l]}h^{[k,j+2]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}) =$$
$$= -h^{[i,l]}h^{[k,j+2]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[m-2,l]}h^{[k,n]}.$$

а) Если $m \geqslant j+4$, $i \geqslant m-2$ и $j+2 \geqslant n$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_4 -h^{[i,l]}h^{[m-2,n]}h^{[k,j+4]} + h^{[m-4,l]}h^{[i,j+2]}h^{[k,n]} \equiv_{5,6}$$
$$\equiv_{5,6} -h^{[m-4,l]}h^{[i,n]}h^{[k,j+4]} + h^{[m-4,l]}h^{[i,n]}h^{[k,j+4]} \equiv 0.$$

б) Если $m \geqslant j+4$, $i < m-2$ и $j+2 \geqslant n$, продолжаем так:

$$\equiv_{4,5} -h^{[i,l]}h^{[m-2,n]}h^{[k,j+4]} + h^{[i,l]}h^{[m-2,j+2]}h^{[k,n]} \equiv_6 0.$$

в) Если $m \geqslant j+4$, $i \geqslant m-2$ и $j+2 < n$, продолжаем так:

$$\equiv_{4,6} -h^{[i,l]}h^{[m-2,j+2]}h^{[k,n]} + h^{[m-4,l]}h^{[i,j+2]}h^{[k,n]} \equiv_6 0.$$

г) Если $m \geqslant j+4$, $i < m-2$ и $j+2 < n$, продолжаем так:

$$\equiv_{5,6} -h^{[i,l]}h^{[m-2,j+2]}h^{[k,n]} + h^{[i,l]}h^{[m-2,j+2]}h^{[k,n]} \equiv 0.$$

д) Если $|m-j-2| = 1$, продолжаем так:

$$\equiv_2 -h^{[i,l]}h^{[k,n]} + h^{[i,l]}h^{[k,n]} \equiv 0.$$

е) Если $m = j+2$, продолжаем так:

$$\equiv_3 -ch^{[i,l]}h^{[k,n]} + ch^{[i,l]}h^{[k,n]} \equiv 0.$$

ж) Если $m \leqslant j$, продолжаем так:

$$\equiv_1 -h^{[i,l]}h^{[m,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[m-2,l]}h^{[i,j]}h^{[k,n]} \equiv_{5,6}$$
$$\equiv_{5,6} -h^{[m-2,l]}h^{[i,n]}h^{[k,j+2]} + h^{[m-2,l]}h^{[i,n]}h^{[k,j+2]} \equiv 0.$$

36. $(11) \wedge (10)$, $i \geqslant k \geqslant j+2,\ j < l,\ m \geqslant l+2,\ k < m,\ l \geqslant n.$

$$(h^{[i,j]}h^{[k,l]} - h^{[k-2,j]}h^{[i,l]})h^{[m,n]} - h^{[i,j]}(h^{[k,l]}h^{[m,n]} - h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}) =$$
$$= -h^{[k-2,j]}h^{[i,l]}h^{[m,n]} + h^{[i,j]}h^{[k,n]}h^{[m,l+2]}.$$

а) Если $i \geqslant m$ и $j \geqslant n$, продолжаем выкладку так:

$$\equiv_4 -h^{[k-2,j]}h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]}h^{[m,l+2]}.$$

Здесь опять приходится разветвить вычисление. Если $m-2 = j+1$, продолжаем так:

$$\equiv_3 -ch^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} + ch^{[k-2,n]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

Если же $m-2 \geqslant j+2$, продолжаем так:

$$\equiv_{5,6} -h^{[k-2,n]}h^{[m-2,j+2]}h^{[i,l+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[m-2,j+2]}h^{[i,l+2]} \equiv 0.$$

б) Если $i < m$ и $j \geqslant n$, продолжаем так:

$$\equiv_{4,5} -h^{[k-2,j]}h^{[i,n]}h^{[m,l+2]} + h^{[k-2,n]}h^{[i,j+2]}h^{[m,l+2]} \equiv_5 0.$$

в) Если $i \geqslant m$ и $j < n$, продолжаем так:

$$\equiv_{4,6} -h^{[k-2,j]}h^{[m-2,n]}h^{[i,l+2]} + h^{[k-2,j]}h^{[i,n]}h^{[m,l+2]} \equiv_6 0.$$

г) Наконец, если $i < m$ и $j < n$, продолжаем так:

$$\equiv_{5,6} -h^{[k-2,j]}h^{[i,n]}h^{[m,l+2]} + h^{[k-2,j]}h^{[i,n]}h^{[m,l+2]} \equiv 0.$$

Это заканчивает доказательство теоремы.

Теперь, применяя лемму о композиции, мы можем легко получить вид базисных элементов в алгебре и нормальную форму в моноиде.

Следствие. *Нормальной формой в K_n являются слова вида*

$$c^m h^{[i_1,j_1]}h^{[i_2,j_2]}\dots h^{[i_k,j_k]}, \text{ где } i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ и } j_1 < j_2 < \dots < j_k.$$

Доказательство. По лемме о композиции базисом в алгебре $\mathbf{k}(K_n)$, а значит, нормальной формой в моноиде K_n являются редуцированные слова. В нашем случае редуцированными словами являются слова, не содержащие подслов $h^{[i,j]}c$ и $h^{[i,j]}h^{[k,l]}$, где $i \geqslant k$ или $j \geqslant l$ (т. е. старших слов соотношений (5)–(11)). Вид таких редуцированнных слов приведен в формулировке следствия.

Литература

1. Temperley H. N. V., Lieb E. H. Relations between «percolation» and «colouring» problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1971. Vol. 322. P. 251–280.

2. Jones V. F. R. Index for subfactors // Invent. Math. 1983. Vol. 72. P. 1–25.

3. Jones V. F. R. Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 12. P. 103–111.

4. Kauffman L. H. An invariant of regular isotopy // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318. P. 417–471.

5. Borisavljević M., Došen K., Petrić Z. Kauffman monoids [Электрон. ресурс]. Режим доступа: arXiv:math.GT/0008187

6. Gröbner W. Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten // Monatsh. Math. 1939. Bd. 47. S. 247–284.

7. Newman M. H. A. On theories with a combinatorial definitions of «equivalence» // Ann. Math. 1942. Vol. 43. P. 223–243.

8. Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы алгебр Ли // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3. С. 292–296.

9. Hironaka H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero // Ann. Math. 1964. Vol. 79. P. 109–326.

10. Buchberger B. An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal. Ph. D. Thesis. University of Innsbruck, 1965.

11. Zinno M. G., A Temperley–Lieb basis coming from the braid group // J. Knot Theory and its Ramifications. 2002. Vol. 11, № 4. P. 575–599.

12. Birman J., Ko K. H., Lee S. J. A new approach to the word and conjugacy problem in the braid groups // Adv. Math. 1998. Vol. 139. P. 322–353.

13. Бокуть Л. А. Вложение в простые ассоциативные алгебры // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. С. 117–142.

14. Бокуть Л. А. Неразрешимость проблемы равенства и подалгебры конечно представленных алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. С. 1173–1219.

15. Bergman G. M. The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. 1978. Vol. 29. P. 178–218.

Статья поступила 25.11.2004 г.